

2018학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'가'형 정답

| | | | | | | | | | |
|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | ③ | 2 | ③ | 3 | ⑤ | 4 | ④ | 5 | ② |
| 6 | ③ | 7 | ① | 8 | ② | 9 | ⑤ | 10 | ③ |
| 11 | ② | 12 | ⑤ | 13 | ④ | 14 | ① | 15 | ④ |
| 16 | ① | 17 | ④ | 18 | ① | 19 | ② | 20 | ⑤ |
| 21 | ④ | 22 | 12 | 23 | 11 | 24 | 27 | 25 | 9 |
| 26 | 546 | 27 | 64 | 28 | 5 | 29 | 51 | 30 | 36 |

해설

1. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$${}^7C_2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

2. [출제의도] 삼각함수의 미분계수를 계산한다.

$$f(x) = x + 2\sin x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 1 + 2\cos x \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

3. [출제의도] 무리수 e 의 정의를 이용하여 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^2$$

$$= e^2$$

4. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 합숫값을 계산한다.

$$\tan^2 \theta = (-3)^2 = 9 \text{ 이고}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + 9$$

$$= 10$$

5. [출제의도] 지수함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + 1 = 2$$

6. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

백의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 4이고, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ 이므로

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $4 \times 20 = 80$

7. [출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$$x^2 - 1 = t \text{ 로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} = 1 \text{ 이고,}$$

$x=1$ 일 때 $t=0$ 이고,
 $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_1^2 x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_0^3$$

$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{3} - 0)$$

$$= \sqrt{3}$$

8. [출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$a > 0$ 에서 $0 < 2^{-\frac{2}{a}} < 1$ 이므로

$1 - 2^{-\frac{2}{a}} > 0$ 이다.

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{4}{a}}\right)}{Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{2}{a}}\right)}$$

$$= \frac{1 - \left(2^{-\frac{2}{a}}\right)^2}{1 - 2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$= \frac{\left(1 - 2^{-\frac{2}{a}}\right) \left(1 + 2^{-\frac{2}{a}}\right)}{1 - 2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$= 1 + 2^{-\frac{2}{a}}$$

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2} \text{ 에서}$$

$$1 + 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{3}{2}$$

$$2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$-\frac{2}{a} = -1$ 에서

$a = 2$

[다른 풀이]

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2} \text{ 에서 } 2Q(4) = 3Q(2)$$

$$2Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{4}{a}}\right) = 3Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{2}{a}}\right)$$

$2^{-\frac{2}{a}} = t$ 로 놓으면 $a > 0$ 이므로 $0 < t < 1$ 이다.

$$2(1 - t^2) = 3(1 - t)$$

$$2(1 - t)(1 + t) = 3(1 - t)$$

$$2(1 + t) = 3$$

$$t = \frac{1}{2}$$

즉 $2^{-\frac{2}{a}} = 2^{-1}$

$-\frac{2}{a} = -1$ 에서

$a = 2$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$f(0) = 2^0 + 1 = 2$, $g(0) = -2^{-1} + 7 = \frac{13}{2}$ 이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(0, 2)$, $B\left(0, \frac{13}{2}\right)$ 이다. 따라서

$$\overline{AB} = \frac{13}{2} - 2 = \frac{9}{2}$$

두 식 $y = 2^x + 1$, $y = -2^{x-1} + 7$ 을 연립하여 풀면

$$2^x + 1 = -2^{x-1} + 7$$

$$\frac{3}{2} \times 2^x = 6$$

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$ 이므로 점 C의 좌표는 (2, 5) 이다.

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

10. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 함수의 극댓값

과 극솟값의 합을 구한다.

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1) - (x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|------------|----|------------|----|------------|
| x | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | \searrow | 극소 | \nearrow | 극대 | \searrow |

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $x=2$ 에서 극대이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$f(2) + f(0) = \frac{2-1}{2^2-2+1} + \frac{0-1}{0^2-0+1}$$

$$= \frac{1}{3} + (-1)$$

$$= -\frac{2}{3}$$

11. [출제의도] 닫힌 구간에서 지수함수의 최댓값을 구한다.

$f(x) = \left(\frac{3}{a}\right)^x$ 에서

(i) $\frac{3}{a} > 1$, 즉 $0 < a < 3$ 일 때,

함수 $f(x)$ 는 증가함수이므로 $x=2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$f(2) = \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 4$ 에서

$$a^2 = \frac{9}{4}$$

$$a = \pm \frac{3}{2}$$

$0 < a < 3$ 이므로

$$a = \frac{3}{2}$$

(ii) $\frac{3}{a} = 1$, 즉 $a = 3$ 일 때,

$f(x) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4가 아니다.

(iii) $0 < \frac{3}{a} < 1$, 즉 $a > 3$ 일 때,

함수 $f(x)$ 는 감소함수이므로 $x=-1$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$f(-1) = \left(\frac{3}{a}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a}{3}$$

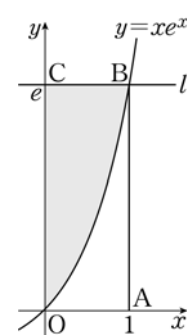
$$= 4 \text{ 에서}$$

$$a = 12$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a 의 값의 곱은

$$\frac{3}{2} \times 12 = 18$$

12. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.



4개의 점 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, e)$, $C(0, e)$ 를 꼭짓점

으로 하는 직사각형의 넓이는

$$1 \times e = e$$

이고, 곡선 $y = xe^x$ 과 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

구하는 도형의 넓이는 $e-1$ 이다.

13. [출제의도] 함수의 도함수를 활용하여 접선의 y 절편을 구한다.

$$f(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$\ln(\tan x) = 0$$

$$\tan x = 1$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $x = \frac{\pi}{4}$ 이므로

점 P의 좌표는 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 이다.

$$f'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{(\sqrt{2})^2}{1} = 2$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y = 2(x - \frac{\pi}{4})$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

이 접선의 y 절편은 $-\frac{\pi}{2}$ 이다.

14. [출제의도] 적분을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$$\frac{d}{dt} \ln|T(t) - 20| = \frac{T'(t)}{T(t) - 20} \text{ 이므로}$$

$\ln|T(t) - 20| = kt + C$ 가 성립한다.

$t = 0$ 일 때, $\ln|T(0) - 20| = C$ 에서

$$C = \ln 80 \dots \textcircled{1}$$

$t = 3$ 일 때, $\ln|T(3) - 20| = 3k + C$ 에서

$$3k + C = \ln 40 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$3k = \ln 40 - \ln 80$$

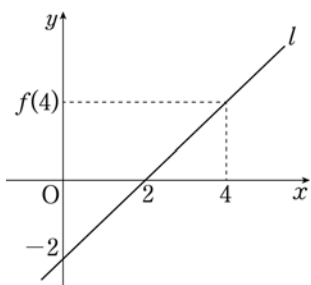
$$= \ln \frac{1}{2}$$

$$= -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{3}$$

15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 합성함수의 미분계수를 구한다.

조건 (가)에서 직선 l 이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 아래 그림과 같이 직선 l 의 x 절편과 y 절편은 각각 2, -2이다.



함수 $y = f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선 l 은 기울기가 1이고, 점 $(2, 0)$ 을 지나므로 직선 l 의 방정식은 $y = x - 2$ 이다.

따라서 $f(4) = 2, f'(4) = 1$ 이다.

$g(x) = xf(2x)$ 에서

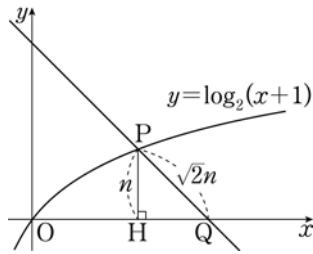
$$g'(x) = f(2x) + 2xf'(2x) \text{ 이므로}$$

$$g'(2) = f(4) + 4f'(4)$$

$$= 2 + 4$$

$$= 6$$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.



점 P의 좌표를 (a, b) (단, a, b 는 양수)라 하고, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 삼각형 PHQ는 $\overline{PH} = \overline{HQ}$ 인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{PQ} = \sqrt{2}n$ 이므로

$\overline{PH} = n$, 즉 $b = n$ 이다.

점 $P(a, n)$ 이 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$$n = \log_2(a+1)$$

$$a = 2^n - 1$$

이때 $\overline{OQ} = \overline{OH} + \overline{HQ}, \overline{HQ} = n$ 이므로

$$x_n = a + n$$

$$= 2^n - 1 + n$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 x_k = \sum_{k=1}^5 (2^k - 1 + k)$$

$$= \sum_{k=1}^5 2^k - \sum_{k=1}^5 1 + \sum_{k=1}^5 k$$

$$= \frac{2 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} - 5 \times 1 + \frac{5 \times 6}{2}$$

$$= 62 - 5 + 15$$

$$= 72$$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 (a, b) (단, a, b 는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n, 0)$ 이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$$\frac{0 - b}{x_n - a} = -1 \text{ 에서 } x_n - a = b$$

$$x_n = a + b$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_n - a)^2 + (0 - b)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{2}b$$

$\overline{PQ} = \sqrt{2}n$ 에서 $b = n$ 이다.

점 $P(a, n)$ 이 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$$n = \log_2(a+1) \text{ 에서}$$

$$a = 2^n - 1$$

$$x_n = a + b$$

$$= 2^n - 1 + n$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 x_k = \sum_{k=1}^5 (2^k - 1 + k)$$

$$= \sum_{k=1}^5 2^k - \sum_{k=1}^5 1 + \sum_{k=1}^5 k$$

$$= \frac{2 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} - 5 \times 1 + \frac{5 \times 6}{2}$$

$$= 62 - 5 + 15$$

$$= 72$$

17. [출제의도] 역함수의 미분을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 구한다.

$g(f(x)) = x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

조건 (나)에서 $g'(f(x)) \neq 0$ 이고

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 이므로}$$

$$f(x)g'(f(x)) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^2 + 1$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\ln|f(x)| = \frac{1}{3}x^3 + x + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수)}$$

$$|f(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

조건 (가)에서 $f(0) = 1 > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

$$f(0) = 1 \text{ 에서}$$

$$C = 0$$

따라서 $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x}$ 이므로

$$f(3) = e^{12}$$

18. [출제의도] 이항정리를 이용하여 부등식의 해결 과정을 완성한다.

$(1+x)^{2n}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는 $\binom{2n}{n}$ 이다.

$(1+x)^n (1+x)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = 2^n \binom{n}{n} \text{ 이 성립한다.}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^n \{2k \times \binom{n}{k}^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{k \times \binom{n}{k}^2\} + \sum_{k=1}^n \{k \times \binom{n}{n-k}^2\}$$

$$= \{(n \binom{n}{1})^2 + 2 \times (n \binom{n}{2})^2 + \dots + n \times (n \binom{n}{n})^2\}$$

$$+ \{(n \binom{n}{n-1})^2 + 2 \times (n \binom{n}{n-2})^2 + \dots + n \times (n \binom{n}{0})^2\}$$

$$= \{(n \binom{n}{1})^2 + 2 \times (n \binom{n}{2})^2 + \dots + n \times (n \binom{n}{n})^2\}$$

$$+ \{n \times (n \binom{n}{0})^2 + (n-1) \times (n \binom{n}{1})^2 + \dots + (n \binom{n}{n-1})^2\}$$

$$= n \times (n \binom{n}{0})^2 + n \times (n \binom{n}{1})^2 + \dots + n \times (n \binom{n}{n})^2$$

$$= n \times \{(n \binom{n}{0})^2 + (n \binom{n}{1})^2 + \dots + (n \binom{n}{n})^2\}$$

$$= n \times \binom{2n}{n}$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^n \{2k \times \binom{n}{k}^2\} \geq 10 \times 2^n \binom{n}{n+1}$$

$$n \times 2^n \binom{n}{n} \geq 10 \times 2^n \binom{n}{n+1}$$

$$n \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} \geq 10 \times \frac{(2n)!}{(n+1)! \times (n-1)!}$$

$$n \times \frac{1}{n} \geq 10 \times \frac{1}{n+1}$$

$$n+1 \geq 10$$

$$n \geq 9$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은

$\boxed{9}$ 이다.

$f(n) = 2^n \binom{n}{n}, g(n) = n, p = 9$ 이므로

$$f(3) + g(3) + p = 6 \binom{3}{3} + 3 + 9$$

$$= 20 + 3 + 9$$

$$= 32$$

19. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.

$\angle BPA = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle QBR = \alpha$ 라 하면

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3}$$

$$\overline{BP} = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sin \theta \tan 2\alpha$$

$\overline{PR} = \sin \theta \tan \alpha$
이다. 따라서

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{PQ} - \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{PR}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\tan 2\alpha - \tan \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \right\}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2$$

$$= 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\theta \right) - \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

20. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 성질을 추론한다.

ㄱ. $f(x) = \int_0^x \sin(\pi \cos t) dt$ 에서

$$f'(x) = \sin(\pi \cos x)$$

$$f'(0) = \sin(\pi \cos 0)$$

$$= \sin \pi$$

$$= 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = \int_0^{-x} \sin(\pi \cos t) dt$$

$$-t = y \text{ 로 놓으면 } -\frac{dt}{dy} = 1 \text{ 이고}$$

$$t = 0 \text{ 일 때 } y = 0, t = -x \text{ 일 때 } y = x \text{ 이므로}$$

$$f(-x) = - \int_0^x \sin\{\pi \cos(-y)\} dy$$

$$= - \int_0^x \sin(\pi \cos y) dy$$

$$= -f(x)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi - t = y$ 라 하면 $-\frac{dt}{dy} = 1$ 이고,

$$t = 0 \text{ 일 때 } y = \pi, t = \pi \text{ 일 때 } y = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(\pi) = \int_0^\pi \sin(\pi \cos t) dt$$

$$= - \int_\pi^0 \sin\{\pi \cos(\pi - y)\} dy$$

$$= - \int_\pi^0 \sin(-\pi \cos y) dy$$

$$= \int_\pi^0 \sin(\pi \cos y) dy$$

$$= - \int_0^\pi \sin(\pi \cos y) dy$$

$$= -f(\pi)$$

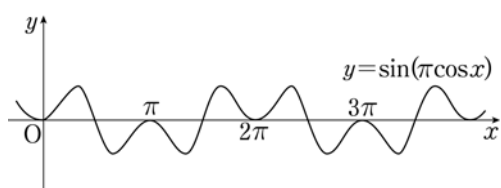
$$2f(\pi) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(\pi) = 0 \text{ 이다. (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[참고]

함수 $y = \sin(\pi \cos x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



21. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$$f(1) = (1+a+b)e$$

$= e$ 에서

$$a+b=0 \text{ ㉠}$$

$$f'(x) = \{x^2 + (a+2)x + a+b\}e^x \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = \{1 + (a+2) + a+b\}e$$

$= e$ 에서

$$2a+b=-2 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a=-2, b=2$$

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = x^2 e^x$$

$$f''(x) = x(x+2)e^x \text{ 이므로}$$

$$f''(1) = 3e$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재한다.

$$f(1) = e \text{ 에서 } f^{-1}(e) = 1 \text{ 이므로}$$

역함수의 미분법에 의하여

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{e}$$

한편 $g(f(1)) = f'(1)$, 즉 $g(e) = e$ 이고

$g(f(x)) = f'(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = f''(x) \text{ ㉢}$$

㉢의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(1))f'(1) = f''(1)$$

$$g'(e) \times e = 3e$$

$$g'(e) = 3$$

따라서

$$h'(e) = (f^{-1})'(e)g(e) + f^{-1}(e)g'(e)$$

$$= \frac{1}{e} \times e + 1 \times 3$$

$$= 4$$

22. [출제의도] 로그부등식의 해를 구한다.

진수의 조건에 의하여

$$x-2 > 0, x > 2 \text{ ㉠}$$

$\log_2(x-2) < 2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x-2 < 2^2, x < 6 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $2 < x < 6$ 이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 는

$$3, 4, 5 \text{ 이므로 그 합은}$$

$$3+4+5=12$$

23. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.

탄젠트 함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{4 + (-2)}{1 - 4 \times (-2)}$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$p=9, q=2 \text{ 이므로}$$

$$p+q=11$$

24. [출제의도] 자연수의 분할의 수와 집합의 분할의 수를 구한다.

$$5 = 1+1+3 = 1+2+2$$

$$\text{이므로 } P(5, 3) = 2 \text{ 이다.}$$

한편, 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 서로 다른 3개의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수는 각각 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이다.

(i) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 3인 경우 5개의 원소 중 3개를 선택하여 원소의 개수가 3인 부분집합을 만들고, 나머지 2개의 원소로 각각 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(ii) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 2, 2인 경우

5개의 원소 중 1개를 선택하여 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들고, 나머지 4개의 원소 중 2개의 원소를 선택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들면 나머지 2개의 원소로 이루어진 부분집합이 정해진다. 이때 각 경우가 2가지씩 중복되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2} = 5 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= 15$$

위의 (i), (ii)에 의하여

$$S(5, 3) = 10 + 15 = 25$$

따라서

$$P(5, 3) + S(5, 3) = 2 + 25 = 27$$

25. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \sin^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$= 1 - \cos^2 x + \cos x + 1$$

$$= -\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

$$\text{따라서 } M = \frac{9}{4} \text{ 이므로}$$

$$4M = 9$$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

선택한 7개의 문자 중 A, B, C의 개수를 차례로 a, b, c라 하면 세 수 a, b, c는 모두 홀수이고 그 합이 7이어야 하므로 다음 경우가 나온다.

(i) (a, b, c) = (1, 1, 5)인 경우

7개의 문자 A, B, C, C, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 1개, 5개 있는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

(a, b, c) = (1, 5, 1), (5, 1, 1)인 경우의 수도 모두 42이다.

(ii) (a, b, c) = (1, 3, 3)인 경우

7개의 문자 A, B, B, B, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 3개, 3개 있는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)}$$

$$= 140$$

(a, b, c) = (3, 1, 3), (3, 3, 1)인 경우의 수도 모두 140이다.

위의 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$3 \times 42 + 3 \times 140 = 546$$

27. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{2x} - 4x + b \text{ ㉠}$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = a + b \text{ ㉡}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 2ae^{2x} - 4$$

$$\text{즉 } \int_0^x f(t) dt = 2ae^{2x} - 4 \text{ ㉢}$$

㉢의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 2a - 4, \text{ 즉 } a = 2$$

이므로 ㉡에서 $b = -2$ 이다.

$$\int_0^x f(t) dt = 4e^{2x} - 4 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 8e^{2x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(a)f(b) &= f(2)f(-2) \\
 &= (8e^4) \times (8e^{-4}) \\
 &= 64e^{4-4} \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

28. [출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{1}{n}$ 이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \\
 &= \int_1^2 (x-1)f(x)dx
 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 (x-1)\ln x dx &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) dx \\
 &= (0-0) - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx \\
 &= -\left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_1^2 \\
 &= -(1-2) + \left(\frac{1}{4} - 1\right) \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$p=4, q=1$ 이므로
 $p+q=5$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

6개의 파일에서 선택한 4개의 파일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z 라 하자.

(i) $(x, y, z) = (0, 2, 2)$ 인 경우

배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 ${}_2H_2, {}_2H_2$ 이고, 4개의 파일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}
 {}_2H_2 \times {}_2H_2 - 2 &= {}_3C_2 \times {}_3C_2 - 2 \\
 &= 3 \times 3 - 2 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

$(x, y, z) = (2, 0, 2), (2, 2, 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ 인 경우

사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 ${}_2H_1, {}_2H_1, {}_2H_2$ 이고, 4개의 파일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}
 {}_2H_1 \times {}_2H_1 \times {}_2H_2 - 2 &= {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_2 - 2 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 - 2 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$(x, y, z) = (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 7 + 3 \times 10 = 51$$

[다른 풀이]

6개의 파일에서 선택한 4개의 파일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z 라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.

이때 파일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고, 학생 A가 받는 파일이 정해지면 학생 B가 받는 파일도 정해진다.

(i) $(x, y, z) = (0, 2, 2)$ 인 경우

학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$ 이므로 구하는 경우의 수는 7이다.

이때 $(x, y, z) = (2, 0, 2), (2, 2, 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ 인 경우

학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

이므로 구하는 경우의 수는 10이다.

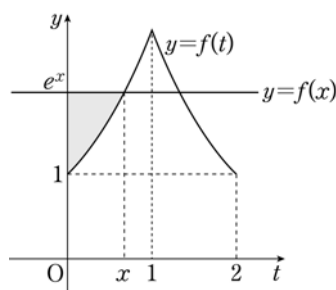
이때 $(x, y, z) = (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 7 + 3 \times 10 = 51$$

30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제를 해결한다.

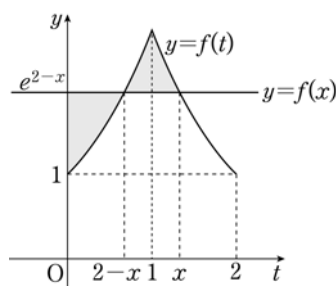
(i) $0 < x \leq 1$ 일 때,



그림에서 $0 < t \leq x$ 일 때, $f(x) \geq f(t)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^x [f(x) - f(t)] dt \\
 &= \int_0^x \{f(x) - f(t)\} dt \\
 &= \int_0^x (e^x - e^t) dt \\
 &= [te^x - e^t]_0^x \\
 &= xe^x - e^x + 1 \\
 &= (x-1)e^x + 1
 \end{aligned}$$

(ii) $1 < x < 2$ 일 때,



그림에서

$0 < t < 2-x$ 일 때, $f(x) \geq f(t)$

$2-x \leq t < x$ 일 때, $f(x) \leq f(t)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^x [f(x) - f(t)] dt \\
 &= \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\} dt \\
 &\quad + \int_{2-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt
 \end{aligned}$$

위의 (i)에 의하여

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\} dt &= (2-x-1)e^{2-x} + 1 \\
 &= (1-x)e^{2-x} + 1
 \end{aligned}$$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$ 의 그래프는 함수 $y=e^x$ 의 그래프와 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{2-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt &= 2 \int_1^x \{f(t) - f(x)\} dt \\
 &= 2 \int_1^x (e^{2-t} - e^{2-x}) dt \\
 &= 2 \left[-e^{2-t} - te^{2-x} \right]_1^x \\
 &= 2 \{ (-e^{2-x} - xe^{2-x}) - (-e - e^{2-x}) \} \\
 &= 2e - 2xe^{2-x}
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 g(x) &= (1-x)e^{2-x} + 1 + 2e - 2xe^{2-x} \\
 &= (1-3x)e^{2-x} + 2e + 1
 \end{aligned}$$

위의 (i), (ii)에서

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & (0 < x \leq 1) \\ (1-3x)e^{2-x} + 2e + 1 & (1 < x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} xe^x & (0 < x < 1) \\ (3x-4)e^{2-x} & (1 < x < 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

| | | | | | | | |
|---------|-----|-----|----|-----|---------------|-----|-----|
| x | (0) | ... | 1 | ... | $\frac{4}{3}$ | ... | (2) |
| $g'(x)$ | | + | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

(극댓값) = $g(1)$

$$\begin{aligned}
 &= (1-1)e + 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(극솟값) = $g\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= (1-4)e^{\frac{2}{3}} + 2e + 1 \\
 &= 2e - 3e^{\frac{2}{3}} + 1
 \end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는

$$\begin{aligned}
 1 - (2e - 3e^{\frac{2}{3}} + 1) &= -2e + 3e^{\frac{2}{3}} \\
 &= -2e + 3\sqrt[3]{e^2}
 \end{aligned}$$

$a = -2, b = 3$ 이므로

$$(ab)^2 = 36$$