

제 2 교시

수학 영역 (가형)

5지선다형

1. $2^5 \times 2^{-3}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. 두 집합

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

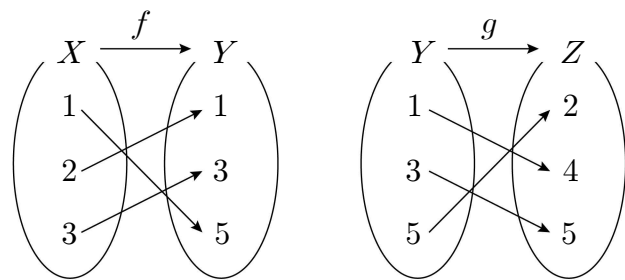
에 대하여 $n(A \cap B)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 6$ 일 때, a_4 의 값은?
[2점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

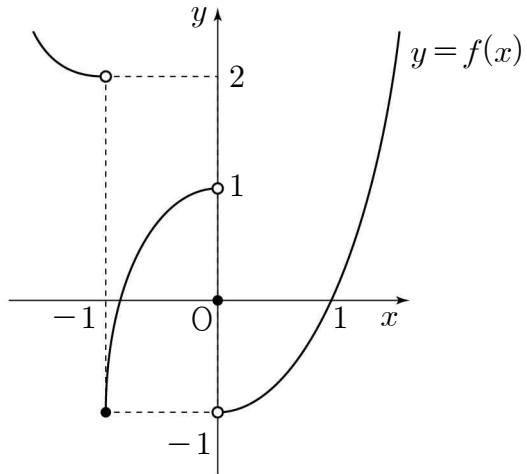
4. 그림은 두 함수 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 를 나타낸 것이다.



$(g \circ f)(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 의 값은? [3 점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

6. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 5n$ 을 만족시킬 때, a_6 의 값은? [3 점]

- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

7. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & (x < 2) \\ 4x + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab 의 값은?
(단, a 와 b 는 상수이다.) [3 점]

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

8. 두 상수 a, b 에 대하여 정의역이 $\{x \mid 2 \leq x \leq a\}$ 인
 함수 $y = \frac{3}{x-1} - 2$ 의 치역이 $\{y \mid -1 \leq y \leq b\}$ 일 때,
 $a+b$ 의 값은? (단, $a > 2, b > -1$) [3점]
- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 9} = 3$ 일 때, $a+b$ 의 값은?
 (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]
- ① -33 ② -30 ③ -27 ④ -24 ⑤ -21

10. 함수 $f(x) = x(x+1)(x-2)$ 에서 x 의 값이 -2 에서 0 까지
 변할 때의 평균변화율과 x 의 값이 0 에서 a 까지 변할 때의
 평균변화율이 서로 같을 때, 양수 a 의 값은? [3점]
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} + 1\right)$ 이 수렴할 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 3n^2}{n^2 + 1} \text{의 값은? [3 점]}$$

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

12. 두 함수

$$f(x) = 4x - 5, \quad g(x) = 3x + 1$$

에 대하여 $(f \circ g^{-1})(k) = 7$ 을 만족시키는 실수 k 의 값은?

[3 점]

- ① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

13. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1) - f(1) = x^3 + 13x^2 + 26x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값은? [3 점]

- ① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 12 - 3t^2$$

이다. $t=0$ 부터 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [4 점]

- ① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

15. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 165, \quad \sum_{k=1}^{21} (-1)^k a_k = -20$$

을 만족시킬 때, a_{21} 의 값은? [4 점]

- ① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

16. 함수 $f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \sqrt{f(-x)} - \sqrt{f(x)} \} = 6$$

일 때, 양수 a 의 값은? [4 점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

17. 첫째항이 3 이고 공비가 $r(r > 1)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 의 각 항이

$$\begin{aligned} b_1 &= \log_{a_1} a_2 \\ b_2 &= (\log_{a_1} a_2) \times (\log_{a_2} a_3) \\ b_3 &= (\log_{a_1} a_2) \times (\log_{a_2} a_3) \times (\log_{a_3} a_4) \\ &\vdots \\ b_n &= (\log_{a_1} a_2) \times (\log_{a_2} a_3) \times (\log_{a_3} a_4) \times \dots \times (\log_{a_n} a_{n+1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 120$ 이다. $\log_3 r$ 의 값은? [4 점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

18. 다음은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{(1+2+3+\dots+n)(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)}$$

의 값을 구하는 과정의 일부이다.

$$S_n = \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{(1+2+3+\dots+n)(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)}$$

이라 하면

$$S_n = \frac{\boxed{\text{가}} \times \sum_{k=1}^n k^4}{n^2(n+1)^2(2n+1)}$$

$$= \boxed{\text{가}} \times \frac{\boxed{\text{나}}}{(n+1)^2(2n+1)} \times \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^4 \frac{1}{n} \right\}$$

이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6 \int_0^1 f(x) dx = \boxed{\text{다}}$$

이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 하고 (나)에 알맞은 식을 $g(n)$ 이라 할 때, $g(2) + \frac{p}{q}$ 의 값은? [4 점]

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

19. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 두 원

$$C_1 : x^2 + y^2 = (n-1)^2,$$

$$C_2 : (x-n)^2 + y^2 = n^2$$

이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P_n, Q_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{P_n Q_n}}{n}$ 의 값은? [4 점]

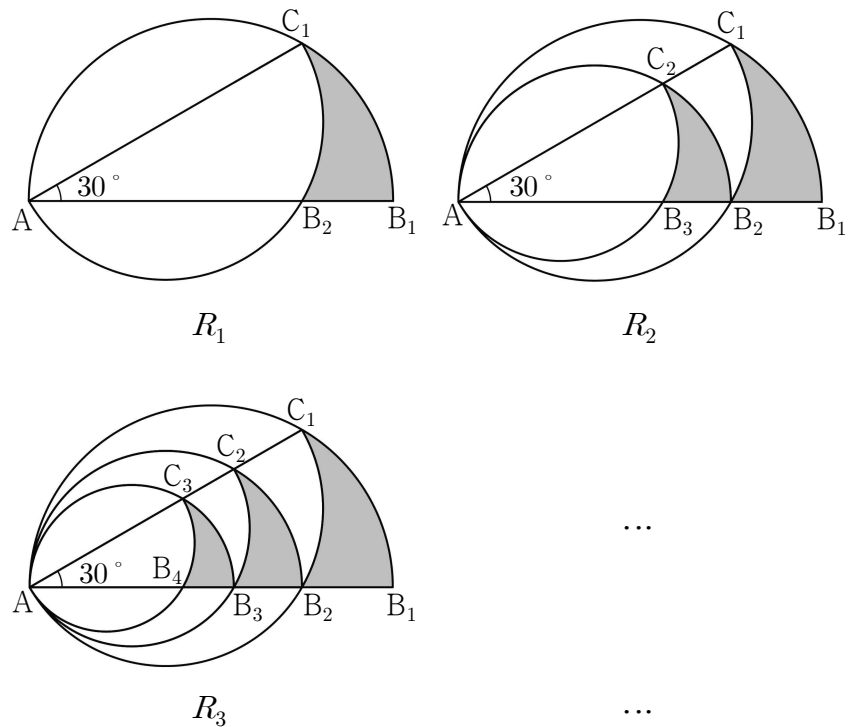
- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

20. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB_1 을 지름으로 하는 반원을 그리고 호 B_1A 위에 $\angle B_1AC_1 = 30^\circ$ 가 되도록 점 C_1 을 잡는다. 선분 AC_1 을 지름으로 하는 반원이 선분 AB_1 과 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 B_2 라 할 때, 선분 B_2B_1 , 호 B_1C_1 과 호 C_1B_2 로 둘러싸인 도형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 AB_2 를 지름으로 하는 반원을 그리고 호 B_2A 위에 $\angle B_2AC_2 = 30^\circ$ 가 되도록 점 C_2 를 잡는다. 선분 AC_2 를 지름으로 하는 반원이 선분 AB_2 와 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 B_3 이라 할 때, 선분 B_3B_2 , 호 B_2C_2 와 호 C_2B_3 으로 둘러싸인 도형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림을 R_n 이라 할 때, 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q}{p}(2\pi + 3\sqrt{3})$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4 점]



- ① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

21. 양수 t 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \int_{3t}^x (s^2 - 4ts + 3t^2) ds$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4 점]

<보 기>

ㄱ. $f'(x) = (x-t)(x-3t)$
 ㄴ. $t > 2$ 일 때, $g(t) = \frac{2}{3}(3t-2)^2$ 이다.
 ㄷ. $t > 0$ 에서 정의된 함수 $g(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에서만 미분가능하지 않다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\log_5 50 + \log_5 \frac{1}{2}$ 의 값을 구하시오. [3 점]

23. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A = \{1, 2a\}, B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$$

에 대하여 $A \subset B$ 를 만족시키는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. [3 점]

24. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \int (3x^2 + 2) dx$$

이고 $f(0) = 1$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3 점]

25. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : x^2 - 4x + 3 \leq 0,$$

$$q : x \leq a$$

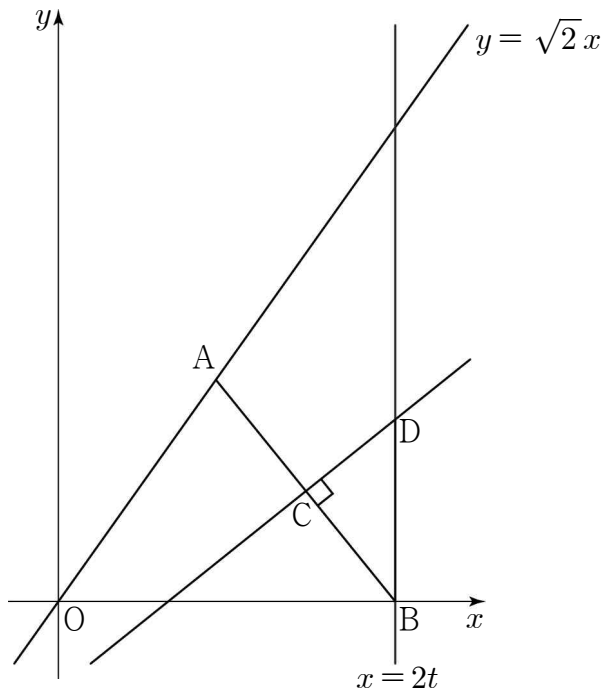
에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하시오. [3 점]

26. x 에 대한 다항식 $x^3 - ax + b$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지가 57 이다. 세 수 $1, a, b$ 가 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 상수이다.)

[4 점]

27. 직선 $y = \sqrt{2}x$ 위의 점 $A(t, \sqrt{2}t)$ ($t > 0$)과 x 축 위의 점 $B(2t, 0)$ 이 있다. 선분 AB 의 중점을 C 라 하고, 점 C 를 지나고 선분 AB 에 수직인 직선이 직선 $x = 2t$ 와 만나는 점을 D 라 하자. 선분 CD 의 길이를 $f(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 16}{f(t) - \sqrt{6}} = a$ 이다. $3a^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

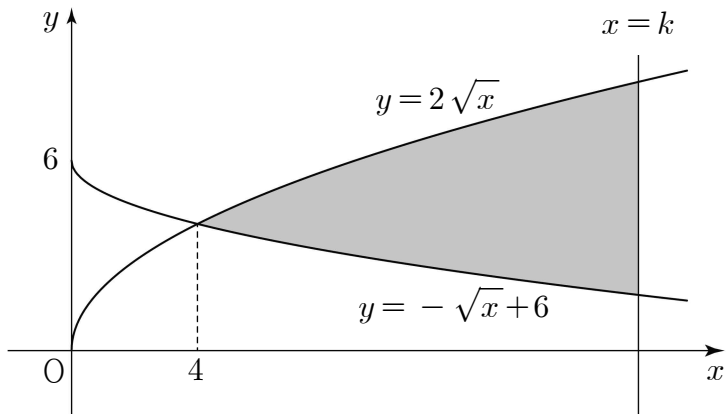
(가) 모든 정수 m 에 대하여

$$\int_m^{m+2} f(x) dx = 4 \text{ 이다.}$$

(나) $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ 이다.

$4 \int_1^{10} f(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면에서 두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+6$ 과 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수가 59가 되도록 하는 자연수 k 의 값을 구하시오. (단, $k > 4$) [4점]



30. 최고차항의 계수의 부호가 서로 다른 두 삼차다항식 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$|f(x)| = \begin{cases} g(x) - 4x - 26 & (x \leq a) \\ g(x) + 2x^3 - 14x^2 + 12x + 6 & (x > a) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, 방정식 $f(x) + a(x-k)^2 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.