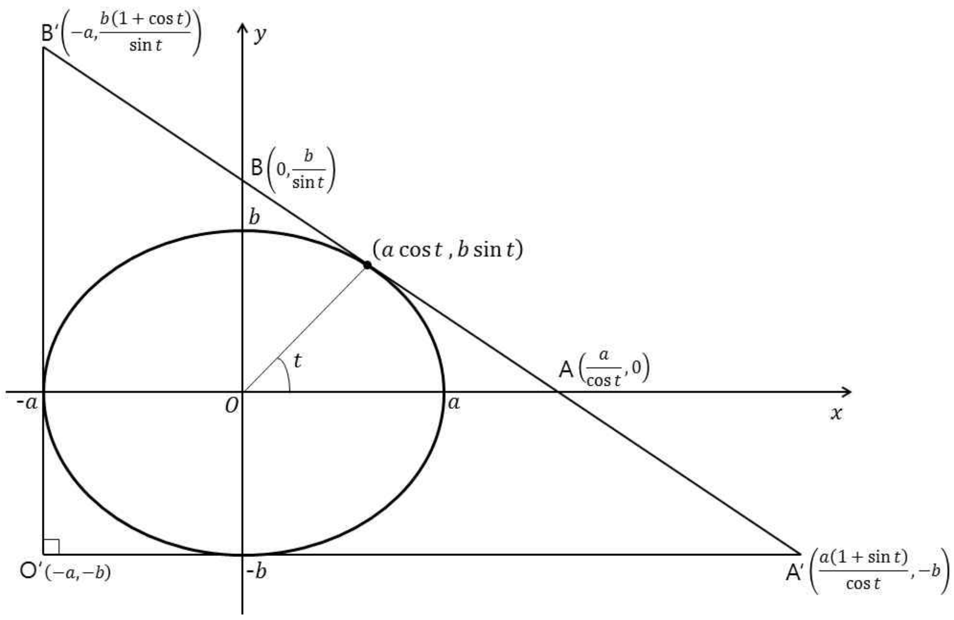
# 한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계

# 논 술 예 시 답 안

오전-1번

1.




점 $(a\cos t, b\sin t)$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{\cos t}{a}x + \frac{\sin t}{b}y = 1$이므로,

$\mathrm{A}\left(\frac{a}{\cos t}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{b}{\sin t}\right)$,

$\mathrm{A}'\left(\frac{a(1+\sin t)}{\cos t}, -b\right)$, $\mathrm{B}'\left(-a, \frac{b(1+\cos t)}{\sin t}\right)$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2}{\sin^2 t}}$,

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sin t+\cos t)^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin^2 t}}$ 이고, $\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = 1+\cos t+\sin t$이다.

2. 타원을 매개변수 곡선 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ ($a$,$b$는 양수)로 나타내자. 두 변이 각각 타원의 장축, 단축에 평행한 직각삼각형 중에서 넓이가 최소인 직각삼각형의 세 변은 타원과 각각 한 점에서 만난다. 이러한 삼각형은 위의 그림에서 $\triangle \mathrm{A'B'O'}$이고, 타원과 빗변 $\mathrm{A'B'}$와의 교점을 $(a\cos t, b\sin t)$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$라 하면, 문제 1번으로부터,

$\triangle \mathrm{A'B'O'}$의 넓이$=\triangle \mathrm{ABO}$의 넓이$\times(1+\cos t+\sin t)^2 = \frac{ab}{2}\frac{(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin t\cos t}$이다.

$f(t) = \frac{(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin t\cos t}$라 하면, $f'(t) = -\frac{(1+\cos t+\sin t)^2(\cos t-\sin t)}{\sin^2 t\cos^2 t}$ 이고,

$f(t)$는 오른쪽 표와 같이 $t = \frac{\pi}{4}$에서 최솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(1+\sqrt{2})^2$를 갖는다.

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | ↘ | $2(1+\sqrt{2})^2$ | ↗ | |

따라서, $\triangle \mathrm{A'B'O'}$의 넓이는 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 최소이고, 이 때 최솟값 $\frac{ab}{2}\times 2(1+\sqrt{2})^2 = ab(1+\sqrt{2})^2$ $(=ab(3+2\sqrt{2}))$를 갖는다.

3. 구하려는 타원을 매개변수 곡선 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ ($a$,$b$는 양수)로 나타내자. 타원의 중심과 빗변과의 교점을 잇는 선분과 타원의 한 축이 이루는 각을 $t$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면, 문제 2번의 풀이로부터, $\triangle$의 넓이$= \frac{1}{2}pq = \frac{ab}{2}f(t)$ 이다.

$0 < t < \frac{\pi}{2}$에서 $f(t) > 0$이고 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 $f(t)$는 최소이므로, 같은 값 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{1}{f(t)}$은 최대이다.

따라서 타원의 장축과 단축의 길이의 곱 $4ab = \frac{4}{f(t)}pq$는 최댓값 $\frac{4}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}pq = \frac{2pq}{(1+\sqrt{2})^2}$를 갖는다.