Lecture Notes for
Introduction to Probability and Statistics

Hanyang University, Ansan, 425-791, Korea
calltimy@hanyang.ac.kr

Probability and Statistics / 확률과 통계

강의노트 11

이항분포

80. Binomial Theorem, 이항분포 : X~B(n,p)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

a,b 중에서 a를 k번 선택하고, b를 나머지 n-k번 선택하는 경우의 수는 $\binom{n}{k}$ 이다.

81. 베르누이 시행
- 성공 아니면 실패
- 성공확률p 는 시행마다 동일
- 각 시행은 독립(시행결과가 다음 시행에 영향을 미치지 않음)

82. 이항확률변수 X
: 성공확률 p 인 베르누이 시행을 n번 반복할 경우의 성공횟수

X : 동전을 두 번 던질 때 앞면(성공)이 나오는 횟수
n=2, p=.5

k = 성공횟수	0	1	2
P(X=k)	.25	.5	.25

p=.5 일 경우의 이항분포는?
(6개의 동전을 던지는 경우의 이항분포)

=> 구해볼 것

83. 확률 p, 시행횟수 n 인 이항분포에서 n 번의 시행에서 k 번 성공할 확률은 다음과 같다.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

84. 이항분포의 평균과 분산

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$

1회 시행에서 성공확률이 p 이므로 n 회 반복할 때 기댓값은 np

85. 이항분포 평균과 분산 증명

X~B(n,p)에서 E(X)=np, V(X)=np(1-p)

$$E(X) = \sum_{all\,x} x f(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

첫항은 k=0 이므로 0 이 된다.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{(k-1)} (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]}$$

여기서 n-1 = m, k-1 = s 로 놓으면,

$$E(X) = np \sum_{s=0}^{m} \frac{m!}{(m-s)!s!} p^s (1-p)^{m-s}$$
$$= np \cdot 1$$
$$= np$$

$$V(X) = [E(X^2)] - [E(X)]^2 = E(X^2) - (np)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{(n-k)} \quad ,(let\ \ q = 1-p)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{(n-k)} \quad ,(\text{첫항은 } 0 \text{ 이므로})$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{(k-1)} q^{(n-k)}$$

n-1 = m , k-1 = s 이라 하면,

$$E(X^2) = np\sum_{s=0}^{m}(s+1)\frac{m!}{(m-s)!s!}p^s q^{(m-s)}$$

$$= np\left(\sum_{s=0}^{m} s\frac{m!}{(m-s)!s!}p^s q^{m-s} + \sum_{s=0}^{m}\frac{m!}{(m-s)\;\;s}p^s q^{m-s}\right)$$

$\displaystyle\sum_{s=0}^{m} s\frac{m!}{(m-s)!s!}p^s q^{m-s} = mp$ 이므로,

$$E(X^2) = np(mp+1)$$

$$= np\{(n-1)p+1\}$$

$$= np(np-p+1)$$

$$= np(np+1)$$

$$= (np)^2 + npq$$

$$V(X) = E(X^2) - (np)^2$$

$$= (np)^2 + npq - (np)^2$$

$$= npq$$

$$= np(1-p)$$