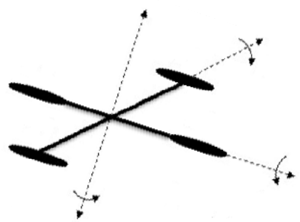
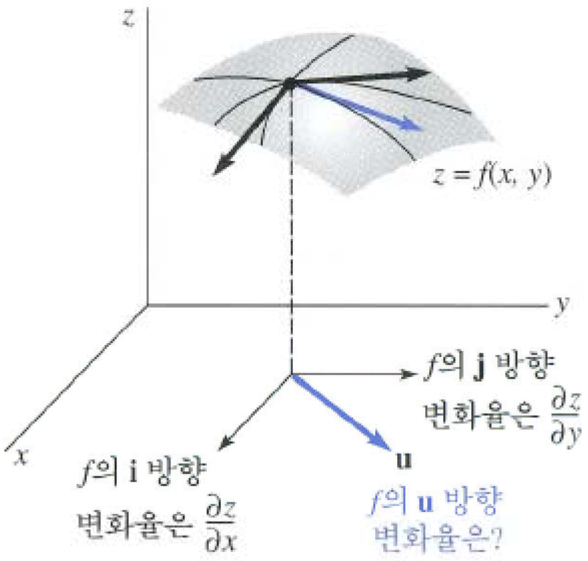
9장 벡터의 미적분
(4)



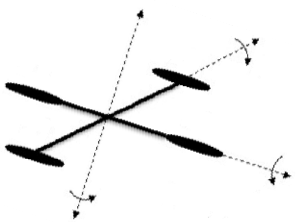
- 방향도함수



기울기 벡터(gradient vector)

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}$$



예제 1 기울기 벡터

$f(x, y)=5y-x^3y^2$일 때 $\nabla f(x, y)$를 구하라.

풀이 (1)에서 $\nabla f(x, y)= \partial\ (5y-x^3y^2)\mathbf{i}+\ \partial\ (5y-x^3y^2)\mathbf{j}$, 즉

$$\nabla f(x, y) = -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}$$

이다. ❑

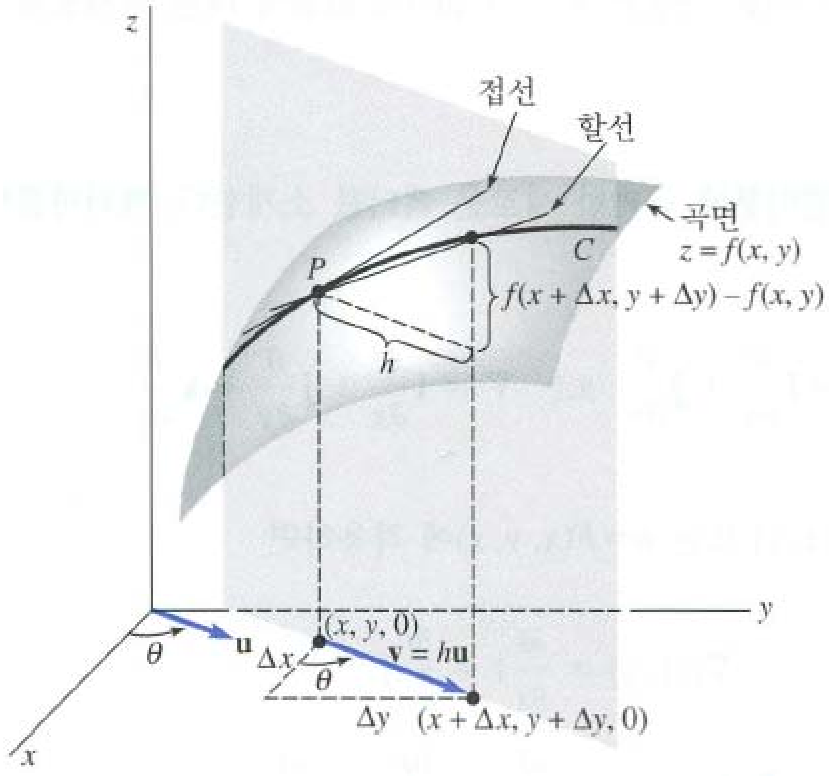
예제 2 한 점에서의 기울기 벡터

$F(x, y, z)=xy^2+3x^2-z^3$일 때 점 $(2, -1, 4)$에서 $\nabla F(x, y, z)$를 구하라.

풀이 (2)에서 $\nabla F(x, y, z)=(y^2+6x)\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}-3z^2\mathbf{k}$, 즉

$$\nabla F(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}$$

이다. ❑



$$\mathbf{u} = \cos\,\theta\mathbf{i} + \sin\,\theta\mathbf{j}$$

$$h = \sqrt{(\Delta x^2) + (\Delta y^2)} >$$

$$\mathbf{v} = h\mathbf{u}$$

$$\Delta x = h\,\cos\,\theta,\ \Delta y = h\,\sin\,\theta$$

할선의 기울기 $\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{h} = \dfrac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x,y)}{h}$

정의 9.5 **방향도함수**

함수 $z=f(x, y)$의 단위벡터 $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$ 방향의 **방향도함수**(directional derivative)는 다음 극한이 존재할 때

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x, y)}{h} \tag{4}$$

이다.

정리 9.6 방향도함수의 계산

함수 $z=f(x, y)$가 미분 가능하고 $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$이면

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y)\cdot\mathbf{u} \tag{5}$$

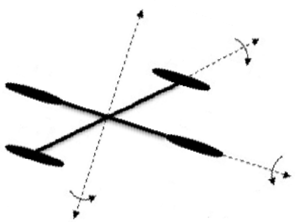
이다.

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\cos\theta, y+h\sin\theta)-f(x,y)}{h}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)\frac{d}{dt}(x+t\cos\theta) + f_2(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)\frac{d}{dt}(x+t\sin\theta) \\ &= f(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)\cos\theta + f_2(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta \\ &= [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]\cdot(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y)\cdot\mathbf{u} \end{aligned}$$



예제 3 **방향도함수**

$f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ 에 대하여 점 (1, 1)에서 양의 x축과 $\pi/6$를 이루는 단위벡터 방향의 방향도함수를 계산하라.

풀이 $\partial f = 4xy^3 + 6y$, $\partial f = 6x^2y^2 + 6x$ 이므로

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \text{ 그리고 } \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$$

이다. 한편 $\theta = \pi/6$ 일 때 $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$ 는 $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ 이므로

$$D_{\mathbf{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6$$

이다. ❏

예제 4 방향도함수

xy 평면에 수직이고 점 $P(2, 1)$과 점 $Q(3, 2)$를 지나는 평면과 곡면 $f(x, y) = 4x^2 + y^2$의 교선이 있다. 점 $(2, 1, 17)$에서 이 교선의 접선의 기울기를 구하라.

풀이 벡터 $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ 방향의 $D_{\mathbf{u}} f(2, 1)$을 구하면 되는데 $\overrightarrow{PQ}$를 단위벡터 $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$로 나타내면

$$\nabla f(x, y) = 8x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} \quad \text{그리고} \quad \nabla f(2, 1) = 16\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

이므로 구하려는 기울기는

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \right) = 9\sqrt{2}$$

예제 5 방향도함수

$F(x, y, z)=xy^2-4x^2y+z^2$ 에 대해 점 $(1, -1, 2)$에서 $6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 방향의 방향도함수를 구하라.

풀이 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=y^2-8xy,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2xy-4x^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z$ 에서

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

이다. $\|6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\|=7$ 이므로 $\mathbf{u}=\frac{6}{7}\mathbf{i}+\frac{2}{7}\mathbf{j}+\frac{3}{7}\mathbf{k}$ 가 주어진 방향의 단위벡터이다. 따라서 (9)로부터

$$D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}$$

이다. ❑

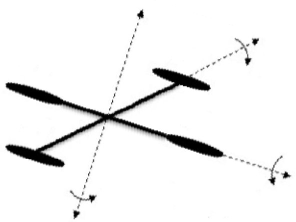
- 방향 도함수의 최대값

$$D_{\mathbf{u}} f = \|\nabla f\| \, \|\mathbf{u}\| \cos \phi = \|\nabla f\| \cos \phi, \quad (\|\mathbf{u}\| = 1)$$

방향도함수의 최대값은 $\|\nabla f\|$ 이고
$\mathbf{u}$ 와 ∇f 의 방향이 같을 때 발생한다($\cos \phi = 1$).

방향도함수의 최소값은 $-\|\nabla f\|$ 이고
$\mathbf{u}$ 와 ∇f 의 방향이 반대일 때 발생한다($\cos \phi = -1$).

기울기 벡터 ∇f 는 f 가 가장 급격히 증가하는 방향을 가리키며
$-\nabla f$ 는 f 가 가장 급격히 감소하는 방향을 가리킨다.



예제 6 방향도함수의 최대/최소

예제 5에서 F의 $(1, -1, 2)$에서의 방향도함수 $D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2)$의 최대값은 $\|\nabla F(1, -1, 2)\| = \sqrt{133}$이고 최소값은 $-\sqrt{133}$이다. ❑

예제 7 경사가 가장 급한 방향

매년 로스앤젤레스에서는 경사가 급한 언덕을 오르는 자전거 경주대회가 열린다. 최소한의 상식이 있는 자전거 선수라면 언덕길을 지그재그(zigzag)로 오를 것이다. 이를 이해해 보도록 하자. 그림 9.28(a)와 같은 $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 4$의 그래프를 언덕의 수학적 모형(mathematical model)이라고 하면 f의 기울기 벡터는

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3}\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}\right] = \frac{2/3}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{r}$$

이고, 여기서 $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$는 언덕의 원형 바닥의 중심을 향하는 벡터이다.

즉 언덕 정상을 향하는 경사가 가장 급한 도로는 xy 평면에 대한 그림자가 원형 바닥의 반지름과 같은 도로이다. $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f$이므로 자전거 선수는 경사도를 줄이기 위해 지그재그 또는 ∇f의 방향이 아닌 다른 방향을 택하게 되는 것이다. ❑

예제 8 **온도가 가장 급격히 감소하는 방향**

직육면체 상자 내부의 온도가

$$T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 3$$

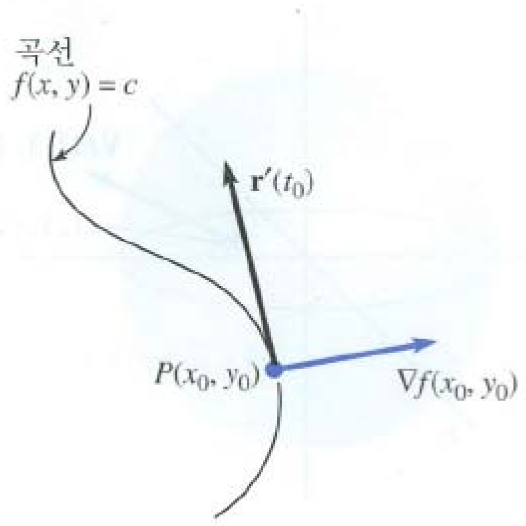
으로 주어진다. 만약 점 (1/2, 1, 1)에 위치한 모기 한 마리가 온도가 가장 급격히 감소하는 방향으로 이동하려면 어느 방향으로 가야 하는가?

풀이 T의 기울기 벡터가

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - 2x)\,\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\,\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\,\mathbf{k}$$

이므로 $\nabla T(1/2, 1, 1) = \frac{1}{4}\mathbf{k}$이다. 따라서 모기는 $-\frac{1}{4}\mathbf{k}$ 방향으로 이동해야 한다. 즉 $T(x, y, 0) = 0$인 상자의 바닥을 향해야 한다. ❑

- 기울기 벡터의 기하학적 해석



$$f(g(t), h(t)) = c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{그리고} \quad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

$\boxed{\nabla f \text{는 점 } P \text{에서 등위곡선에 수직}}$

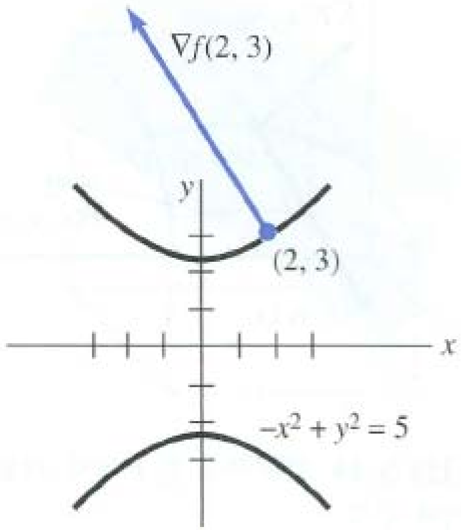
예제 1 **한 점에서의 기울기 벡터**

점 (2, 3)을 지나는 $f(x, y) = -x^2 + y^2$의 등위곡선을 구하라. 그 점에서의 기울기 벡터를 그리라.

풀이 $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$이므로, 등위곡선은 쌍곡선 $-x^2 + y^2 = 5$이다.

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{그리고} \quad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

이고, 그림 9.31은 등위곡선과 $\nabla f(2, 3)$을 보여 준다. ❑



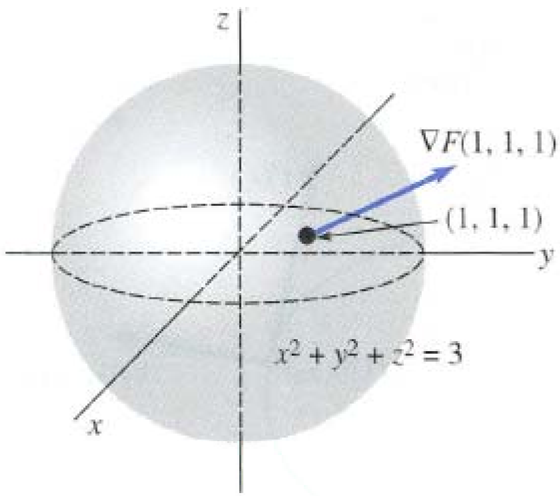
예제 2　한 점에서의 기울기 벡터

점 (1, 1, 1)을 지나는 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$의 등위곡면을 구하라. 이 점에서의 기울기 벡터를 그리라.

풀이　$F(1, 1, 1) = 3$이므로, 점 (1, 1, 1)을 지나는 등위곡면은 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$이다. 함수의 기울기 벡터는

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

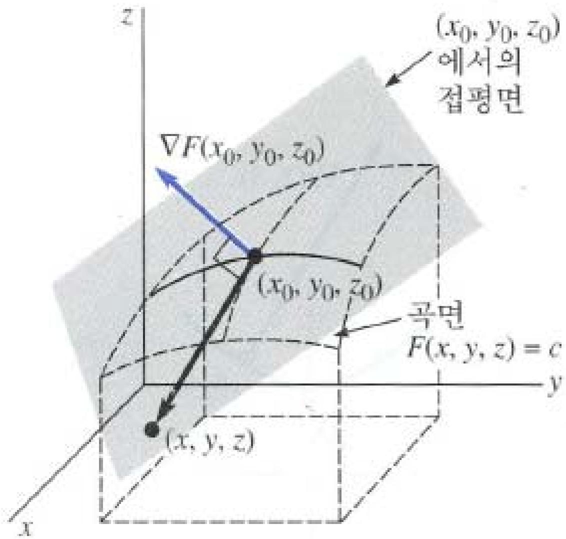
이고, 주어진 점에서 $\nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$이다. 등위곡면과 $\nabla F(1, 1, 1)$이 그림 9.33에 나와 있다. ❑

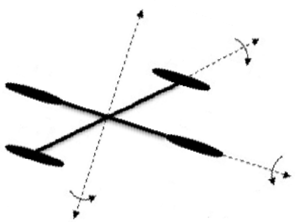


- 접평면 Tangent Plane

정의 9.6 **접평면**

점 $P(x_0, y_0, z_0)$가 ∇F가 $\mathbf{0}$이 아닌 $F(x, y, z)=c$의 그래프 위의 점이라 하자. 점 P에서의 접평면은 점 P에서 계산된 ∇F에 수직인, P를 지나는 평면이다.





정리 9.7 **접평면의 방정식**

점 $P(x_0, y_0, z_0)$가 ∇F가 $\mathbf{0}$이 아닌 그래프 $F(x, y, z)=c$ 위의 점일 때 점 P에서의 접평면의 방정식은

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \qquad (5)$$

이다.

예제 3 접평면의 방정식

$x^2-4y^2+z^2=16$의 점 $(2, 1, 4)$에서 접평면의 방정식을 구하라.

풀이 $F(x, y, z)=x^2-4y^2+z^2$로 정의하면 점 $(2, 1, 4)$를 지나는 등위곡면은 $F(x, y, z)=F(2, 1, 4)=16$이다. $F_x(x, y, z)=2x$, $F_y(x, y, z)=-8y$, $F_z(x, y, z)=2z$이므로

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 8y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{그리고} \quad \nabla F(2, 1, 4) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

이다. (5)로부터 접평면의 방정식은

$$4(x - 2) - 8(y - 1) + 8(z - 4) = 0 \quad \text{또는} \quad x - 2y + 2z = 8$$

이다. ❑

예제 4 **접평면의 방정식**

$z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+4$에 대해 점 $(1,-1,5)$에서 접평면의 방정식을 구하라.

풀이 $F(x, y, z)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-z+4$로 정의하면 $F(x, y, z)=F(1, -1, 5)=0$이다. $F_x=x$, $F_y=y$, $F_z=-1$이므로

$$\nabla F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{그리고} \quad \nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

이고, 따라서 (5)로부터 구하는 방정식은

$$(x+1)-(y-1)-(z-5)=0 \quad \text{또는} \quad -x+y+z=7$$

이다. 그림 9.35를 보라. ❑

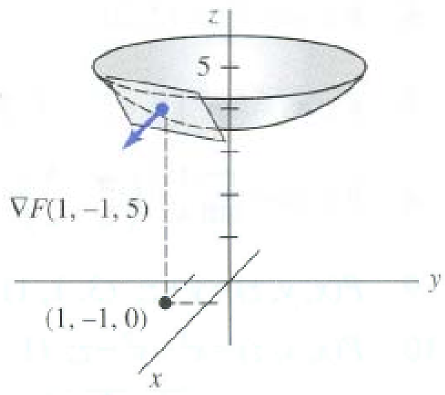


그림 9.35 예제 4의 접평면

예제 5 **곡면의 법선**

예제 4의 곡면에 대하여 점 $(1,-1,5)$에서 법선의 매개방정식을 구하라.

풀이 점 $(1,-1,5)$에서 법선의 방향벡터는 $\nabla F(1,-1,5)=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$이다. 그러므로 법선의 매개방정식은 $x=1+t$, $y=-1-t$, $z=5-t$이다. ❑